Analiza II.1*

Egzamin poprawkowy, 25 lutego 2023

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na oddzielnej kartce.
W każdym zadaniu należy wyraźnie powoływać się na wykorzystywane twierdzenia (dowodzone na wykładzie lub ćwiczeniach).
Prosimy o czytelne pisanie rozwiązań – prace nieczytelne nie będą sprawdzane.
Czas pisania: 180 min.

Zadanie 1: Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\int_D \frac{\sqrt[n]{x^n+y^n}}{x^2y^2}\,dl_2, \qquad D=\{(x,y):\ x>0,\ y>0,\ 1<xy<4\}.$$

Postępowanie uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenia.

Zadanie 2: Wykazać, że równanie

$$w^3-2xw+y=0$$

określa w otoczeniu punktu $(1,1,1)$ funkcję $w(x,y)$ klasy C^∞. Napisać wielomian Taylora stopnia 2 fukcji $w(x,y)$ w punkcie $(1,1)$.

Zadanie 3: Niech $A\subset(0,+\infty)$ będzie mierzalny w sensie Lebesgue'a oraz taki, że $\int_A x\,dl_1(x)=7$. Przy ustalonych stałych $0<a<b$ definiujemy funkcję

$$f(x):\ =l_1(A\cap[ax,bx]),\qquad x\geq 0.$$

Obliczyć wartość całki $\int_{[0,+\infty)} f(x)\,dl_1(x)$.

Zadanie 4: Wykazac, że dla dowolnej funkcji mierzalnej w sensie Lebesgue'a $f:(0,1)\to(0,+\infty)$ zachodzi nierówność

$$\left(\int_{(0,1)} f(x)\,dl_1(x)\right)\cdot\left(\int_{(0,1)}\frac{1}{f(x)}\,dl_1(x)\right)\geq 1.$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 5: Rozpatrzmy obraz sfery jednostkowej $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1\}$ przy odwzorowaniu $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ danym wzorem

$$F(x,y,z)=(x^2-y^2,xy,yz,xz).$$

a) Czy obraz $F(S)$ jest rozmaitością?

b) Wyznaczyć ekstremalne wartości odległości punktów obrazu $F(S)$ od początku układu współrzędnych $p_0=(0,0,0,0)$.